Quantum Fysica 2

Olaf Scholten
Kernfysisch Versneller Instituut
NL-9747 AA Groningen

Tentamen, Woensdag 28 juni, 2000
5 opgaven, iedere uitwerking op een apart vel papier met naam en studie nummer

Opgave 1

Beschouw een eigentoestand Y_{lm} van L_z en L^2.

a. Druk L_x en L_y uit in L_+ en L_- en toon aan dat $< L_x >= 0$ en $< L_y >= 0$.

b. Toon aan dat in deze toestand $< L_x^2 >=< L_y^2 >= \frac{1}{2}[l(l+1) - m^2]\hbar^2$

c. Beschouw vanaf nu een deeltje beschreven door

$$|\Psi >= \frac{1}{\sqrt{7}} [Y_{1,1} + Y_{1,-1} + Y_{2,2} + Y_{2,1} + Y_{2,0} + Y_{2,-1} + Y_{2,-2}] \ .$$

Geef de formule voor $< L_z >$ en bereken de waarde.

d. Is $|\Psi >$ een eigentoestand van L_z?, leg uit.

e. Geef de genormeerde golffunctie als uit de meting blijkt dat $L_z = 1$.

f. Geef de formule voor $< L_x >$ (n.b. de x-component!) en bereken de waarde voor de golffunctie

$$|\Phi >= \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{2,2} + i\, Y_{2,1}] \ .$$

Opgave 2

Beschouw 3 deeltjes in een 1 dimensionele Harmonische-oscillator potentiaal. De 3 deeltjes zijn in thermisch evenwicht met een totale energie van $(9/2)\hbar\omega$.

a. Beantwoord voor het geval van 3 NIET identieke deeltjes met gelijke massa de volgende vragen.

   (a) Stel de energie van een willekeurig deeltje wordt gemeten. Wat zijn de mogelijke meetwaarden?

   (b) Wat zijn de kansen voor de verschillende meetwaarden?

   (c) Wat is de meest waarschijnlijke energieverdeling tussen de 3 deeltjes?

   (d) Wat is de gemiddelde energie van een deeltje?

b. Beantwoord bovenstaande vragen voor het geval van 3 identieke fermionen. Neem aan dat alle spins in de zelfde richting staan b.v. onderinvloed van een sterk extern magneetveld (negeer spin dus).

Opgave 3

Beschouw een deeltje met spin $\frac{1}{2}\hbar$. Er wordt nu een meting gedaan met de operator $U = S_x + S_y$

a. Welke eigenwaarden λ_1 en λ_2 van U kunnen gemeten worden?

b. Druk de bijbehorende toestanden u_1 en u_2 uit in de eigentoestanden van S_z, zijnde $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1/2, +1/2>$ en $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1/2, -1/2>$.

c. Is, in principe, een simultane meting van U en S_x mogelijk? Zijn U en S_x onafhankelijke observabelen?

d. Na de meting van U wordt S_z bepaald. Geef voor één van de twee eigentoestanden van U de de mogelijke waarden voor S_z en de bijbehorende kansen.

Opgave 4

a. Geef de tijds-onafhankelijke Schrödinger vergelijking voor het probleem van de oneindige vierkante put,

$$V(x,y,z) = \begin{cases} 0, & \text{als x,y,z allen tussen 0 and a;} \\ \infty, & \text{overige gevallen} \end{cases}$$

Specificeer ook de randvoorwaarden.

b. Gebruik scheiding van variabelen om dit probleem op te lossen, geef dus de algemene uitdrukking voor de energieën en golffuncties.

c. Hoeveelvoudig zijn de grondtoestand en de eerste aangeslagentoestand gedegenereerd?

d. Geef de algemene storingstheorie formule voor de eerste orde correctie tot de energieën onder invloed van een kleine storing H' in de Hamiltoniaan.

e. We voegen nu de volgende storing H' toe aan de Hamiltoniaan,

$$H' = \begin{cases} V_0, & \text{als } a/4 < x < 3a/4 \text{ en } a/4 < y < 3a/4 \\ 0, & \text{overige gevallen} \end{cases}$$

Geeft de eerste orde correctie tot de grondtoestands energie.

Opgave 5

In dit probleem moet een benaderde oplossing van een gestoorde één dimensionele harmonische oscillator,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \alpha x^3 ,$$

worden gevonden door variatie van de parameter b in de golffunctie,

$$\Psi(x) = \frac{A}{x^2 + b^2} ,$$

met $A = c\, b^{3/2}$.

a. Bepaal de normerings constante c.

b. Geef de algemene uitdrukking voor de beste benadering tot de grondtoestands-energie volgens het variatie principe.

c. Construeer de oplossing voor dit probleem.

d. Wat is de reden dat je antwoord niet van α afhangt en dat dit dus een vrij slechte keuze is voor de variatie golffunctie?

= =

Bij de bovenstaande opgaven kunnen de volgende formules voor eigenvectoren in een harmonische-oscillator potentiaal nuttig zijn.

= =

Sigma (spin) matrices.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\sigma_{x,y,z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{3}$$

Harmonic oscillator wave functions.

Solutions for a harmonic oscillator potential $V(x) = \frac{\omega^2 m}{2}x^2$

$$u_n = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-1/2} H_n(y) e^{-y^2/2} \tag{4}$$

with $y = \sqrt{m\omega/\hbar}\, x$, where the Hermiet polynomials for $n \leq 4$ are given as

$$H_0(y) = 1 \tag{5}$$
$$H_1(y) = 2y \tag{6}$$
$$H_2(y) = 4y^2 - 2 \tag{7}$$
$$H_3(y) = 8y^2 - 12y \tag{8}$$
$$H_4(y) = 16y^4 - 48y^2 + 12 \tag{9}$$

Matrix elements:

$$
\begin{aligned}
<n|x^2|n> &= <n|p^2|n>/(m\omega)^2 = (2n+1)\,\frac{\hbar}{2m\omega} && (10)\\
<n|x^2|n-2> &= -<n|p^2|n-2>/(m\omega)^2 = \sqrt{n(n-1)}\,\frac{\hbar}{2m\omega} && (11)\\
<n|x^3|n-1> &= 3n^{3/2}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} && (12)\\
<n|x^3|n-3> &= \sqrt{n(n-1)(n-2)}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} && (13)\\
<n|x^4|n> &= [2(n+1)(n+2)+(2n-1)(2n+1)]\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 && (14)\\
<n|x^4|n-2> &= 2(2n-1)\sqrt{n(n-1)}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 && (15)\\
<n|x^4|n-4> &= \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 && (16)
\end{aligned}
$$

Hydrogen wave functions.

$R_{nl}(r)$ are hydrogen-like wave functions with $a_0 = \frac{\hbar}{\mu c\alpha}$ and $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$.

$$
\begin{aligned}
R_{10}(r) &= 2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}\ , && (17)\\
R_{20}(r) &= 2\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(1-\frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-Zr/2a_0}\ , && (18)\\
R_{21}(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}\, e^{-Zr/2a_0}\ . && (19)
\end{aligned}
$$

Spherical harmonics $Y_{l,m}$.

$$
Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\ ; Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{i\phi}\sin\theta\ ; Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\ , \tag{20}
$$

with $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{l,m}$, and the normalization condition:

$$
\int d\Omega\, Y^*_{l,m}(\Omega) Y_{l',m'}(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, Y^*_{l,m}(\Omega) Y_{l',m'}(\Omega) = \delta_{l,l'}\,\delta_{m,m'}\ . \tag{21}
$$

$$
L_+ = L_x + iL_y \quad \text{and} \quad L_+\, Y_{lm} = \sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\, Y_{l,m+1}\ , \tag{22}
$$

$$
L_- = L_x - iL_y \quad \text{and} \quad L_-\, Y_{lm} = \sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\, Y_{l,m-1}\ . \tag{23}
$$

In addition:

$$
\begin{aligned}
|l,j,m_j> &= \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}|Y_{l,m}\chi_+> + \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}|Y_{l,m+1}\chi_-> \quad \text{for } j = l+1/2 && (24)\\
|l,j,m_j> &= \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}}|Y_{l,m}\chi_+> - \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}|Y_{l,m+1}\chi_-> \quad \text{for } j = l-1/2 && (25)
\end{aligned}
$$

with $m = m_j - 1/2$.

Integralen.

Alle benodigde integralen zijn af te leiden uit:

$$\int_{-a}^{a} e^{i\alpha x}\,dx = \frac{2}{\alpha}\sin(\alpha a)\,, \tag{26}$$

$$\int_{-a}^{a} \cos\alpha x\; e^{ikx}\,dx = \left[\frac{\sin(\alpha+k)a}{\alpha+k} + \frac{\sin(\alpha-k)a}{\alpha-k}\right]\,, \tag{27}$$

$$\int_{-a}^{a} \sin\alpha x\; e^{ikx}\,dx = i\left[\frac{\sin(\alpha+k)a}{\alpha+k} - \frac{\sin(\alpha-k)a}{\alpha-k}\right]\,, \tag{28}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}\,dx = 2\pi\,\delta(k-k')\,, \tag{29}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(p')\,\delta(p-p')\,dp' = f(p) \quad \text{(mits } f(p) \text{ differentieerbaar in } p)\,, \tag{30}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b+ic)^2}\,dx = \sqrt{\pi/a}\,, \tag{31}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a(x+b)^2}\,dx = (b^2+1/2a)\sqrt{\pi/a}\,, \tag{32}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2} e^{ikx}\,dx = \sqrt{\pi/a}\,e^{-ikb-k^2/4a}\,, \tag{33}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)\,dx = \sqrt{\pi/a}\,e^{-b^2/4a}\,, \tag{34}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{(2a)^n}\sqrt{\pi/a} \text{ voor } n\geq 0\,, \tag{35}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{voor } n=0\,, \tag{36}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2}\,dx = \frac{n!}{2\,a^{n+1}} \quad \text{met } a>0\,, \tag{37}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{n} e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad \text{met } a>0\,, \tag{38}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2(px)}{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi p\,, \tag{39}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,e^{ikx}\,dx = \frac{\pi}{a}e^{-a|k|}\,, \text{ ook geldig voor k=0}\,, \tag{40}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2\,a^3}\,, \tag{41}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2\cdot4\cdots(2n-2)}\,\frac{\pi}{a^{2n-1}} \text{ voor } n\geq 2, \tag{42}$$

$$\int_{-a}^{a} x^2\sin^2 n\pi x/a\,dx = \frac{a^3}{2}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{(n\pi)^2}\right]\,, \tag{43}$$

$$\int_{-a}^{a} x^2\cos^2(n-\frac{1}{2})\pi x/a\,dx = \frac{a^3}{2}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{((n-\frac{1}{2})\pi)^2}\right]\,, \tag{44}$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,. \tag{45}$$

Geef in de oplossingen aan welke formules je hebt gebruikt.